Comparaison des fonctions usuelles.

1 Comparaison de fonctions.

Remarque(s) 1.1 *Comparer deux fonctions f et g, correspond au questionnement suivant : Pour quels x dans $\mathbb{R}$ la courbe de f est-elle en dessous de celle de g et pour quels x dans $\mathbb{R}$ la courbe de f est-elle au dessus de celle de g. Pour répondreà cette question, invariablement nous utilisons la méthode suivante :*

Méthode(s) 1.1
- ❒ *Factoriser l'expression algébrique $f(x) - g(x)$.*
- ❒ *Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ en fonction de x, en utilisant un tableau de signes.*
- ❒ *Conclure quant à la position relative des deux courbes en regardant le signe de la différence $f(x) - g(x)$.*

Exemple(s) 1.1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x - 5$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5x^2 + 2x + 7$.*
Notons $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives de f et g.

1. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*
   $f(x) = (x+1)(x-5)$ et $g(x) = (x+1)(-5x+7)$.
2. *Factoriser $h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)(x-5) - (x+1)(-5x+7)$.*
3. *A l'aide d'un tableau de signes étudier le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.*
4. *Représenter les deux courbes dans un même repère orthonormée.*

Correction

1. $(x+1)(x-5) = x^2 - 5x + x - 5 = x^2 - 4x - 5 = f(x)$.

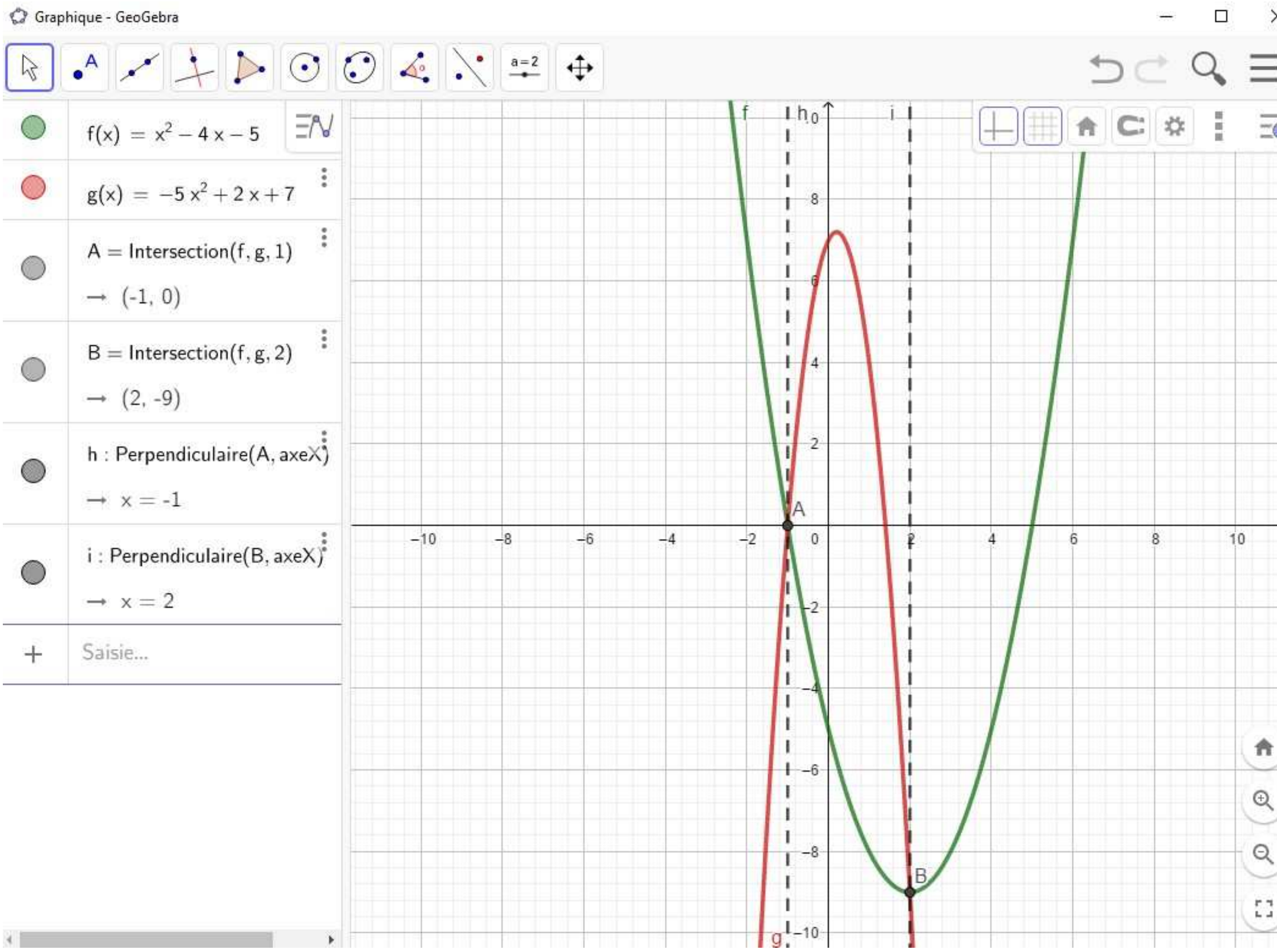
   $(x+1)(-5x+7) = -5x^2 + 7x - 5x + 7 = -5x^2 + 2x + 7 = g(x)$
2. $h(x) = f(x) - g(x) = (x+1)(x-5) - (x+1)(-5x+7) = (x+1)[(x-5) - (-5x+7)] = (x+1)(6x-12)$.
   $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
   $6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
   Etudions le signe de $h(x) = (x+1)(6x-12)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Déduisons du tableau de signes la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
comparaison de $f(x)$ et $g(x)$		f(x)>g(x)	0	f(x)<g(x)	0	f(x)>g(x)	

3. Voici les courbes représentative de f et g.



2 Comparaison de la fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$.

Proposition 2.1 *Soit f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x$, $g(x)=x^2$.*
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative respective dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Nous avons les propriétés suivantes :

- *Pour tout $x \in [0;1]$ on a $x^2 \leq x$.*
- *Si $0 \leq x \leq 1$, alors $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.*
- *Pour tout $x \in [1;+\infty[$ on a $x^2 \geq x$.*
- *Si $x \in [1;+\infty[$, alors $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$.*

Démonstration :

- Factorisons $h(x) = x^2 - x$.
  $h(x) = x^2 - x = x(x-1)$
- Etudions le signe de $h(x) = x(x-1)$.(A l'aide d'un tableau de signes.) $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$-$	0	$+$	
comparaison de $f(x)$ et $g(x)$	0	f(x)>g(x)	0	f(x)<g(x)	

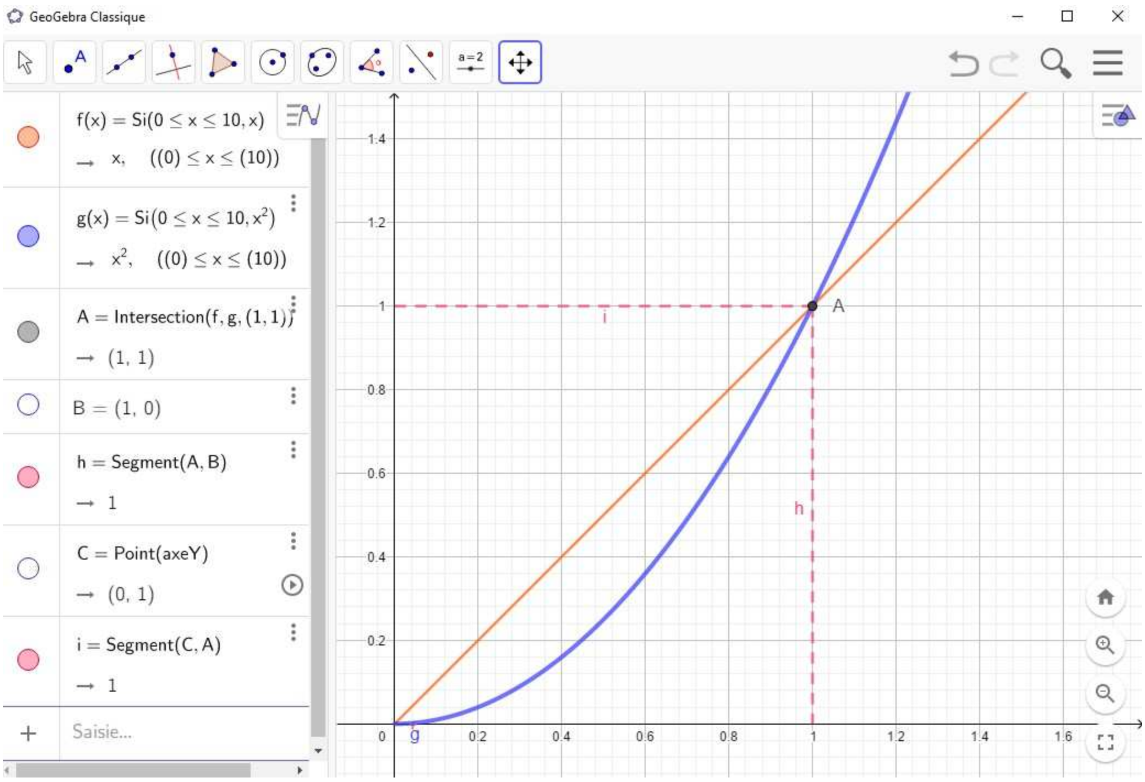
❒ Interprétation graphique pour les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x$, $g(x) = x^2$.

Grâce au tableau de signes précédents, nous avons :

1. Si $0 \leq x \leq 1$, alors $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$.
2. Si $x \in [1; +\infty[$, alors $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\mathcal{C}_f$.

❒ Représentations graphiques :



3 Comparaison de la fonction $x \mapsto x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

Proposition 3.1 *Soit f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x}$.*
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative respective dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Nous avons les propriétés suivantes :

- *Pour tout $x \in [0; 1]$ on a $x \leq \sqrt{x}$.*
- *Si $0 \leq x \leq 1$, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.*
- *Pour tout $x \in [1; +\infty[$ on a $x \geq \sqrt{x}$.*
- *Si $x \in [1; +\infty[$, alors $\mathcal{C}_f$ qui est au dessus de $\mathcal{C}_g$.*

Démonstration :

❒ Factorisons $h(x) = x - \sqrt{x}$, on a $h(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$.

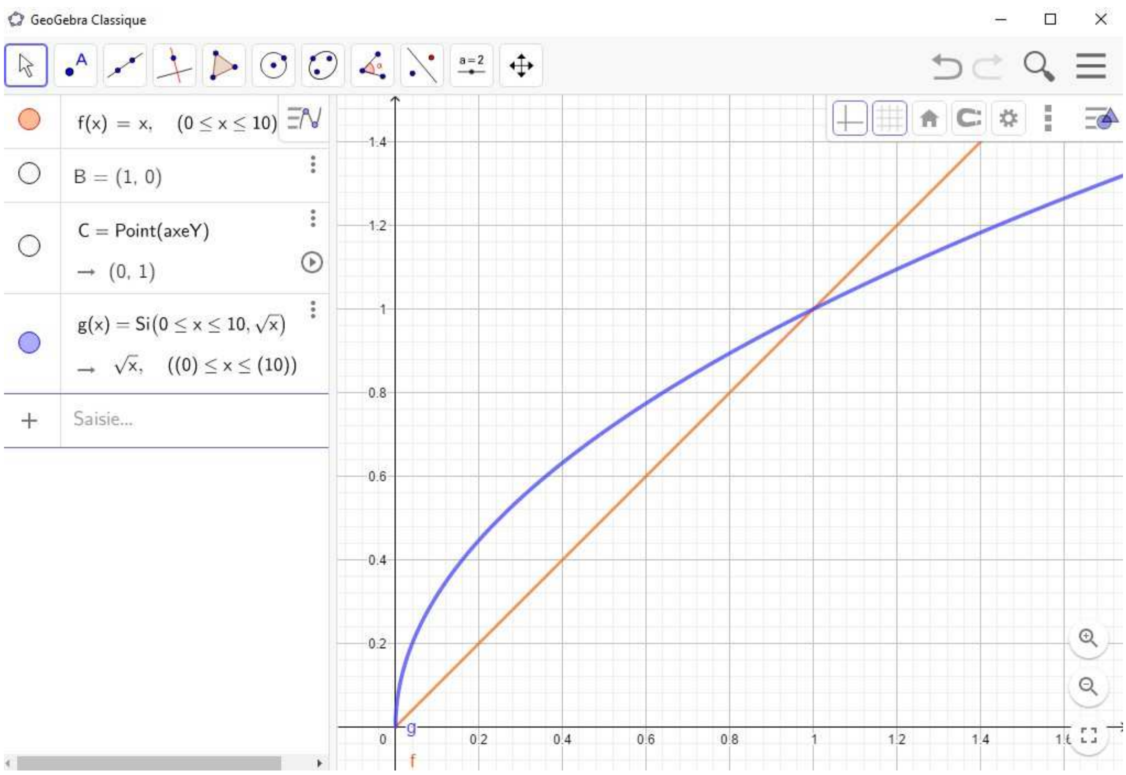
❒ Etudions le signe de $h(x) = x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$.(A l'aide d'un tableau de signes.)
Nous savons que pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$.
Et nous avons les équivalences suivantes : $\sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$.

x	0		1		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$\sqrt{x} - 1$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	0	$-$	0	$+$	
comparaison de $f(x)$ et $g(x)$	0	f(x)<g(x)	0	f(x)>g(x)	

❒ Interprétation graphique pour les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Grâce au tableau de signes précédents, nous avons :

1. Si $0 \leq x \leq 1$, alors $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.
2. Si $x \in [1; +\infty[$, alors $\mathcal{C}_f$ qui est au dessus de $\mathcal{C}_g$.

❒ Représentations graphiques :



4 Position relative des courbes de $x \to x$, $x \to x^2$ et $x \to \sqrt{x}$.

Proposition 4.1 *Soit f, g, h les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ et $h(x)=\sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ leur courbe représentative respective dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. Nous avons les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $x \in [0;1]$ on a $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.*
2. *Si $0 \leq x \leq 1$, alors $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ qui est en dessous de $\mathcal{C}_h$.*
3. *Pour tout $x \in [1;+\infty[$ on a $\sqrt{x} \leq x \leq x^2$.*
4. *Si $0 \leq x \leq 1$, alors $\mathcal{C}_h$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ qui est en dessous de $\mathcal{C}_g$.*

5 Représentations des trois courbes ensemble.