

# EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES

## I Calcul algébrique

- ▶ Développer, c'est transformer un produit de facteurs en une somme de termes.
- ▶ Factoriser, c'est transformer une somme de termes en un produit de facteurs.

**Exemple 1**    ➔  $-2x^3 + 14x^2 + 5x - 35$  est une forme développée du produit  $(-2x^2 + 5)(x - 7)$ ,  
➔  $(-2x^2 + 5)(x - 7)$  est une forme factorisée de la somme  $-2x^3 + 14x^2 + 5x - 35$ ,  
➔  $-2x^2 + 3x - 5$  est la forme réduite de  $3 - x^2 + 2x - x^2 - 8 + x$ .

**Exemple 2**    1. Développer et réduire les expressions suivantes:

➔  $x^2(6x - 2) + (x - 5)(5 - 2x) + 8 =$ .

➔  $(x + 3)^2(x + 2) + 2x(5x - 3) - 16$ .

2. Factoriser les expressions suivantes:

➔  $(x - 5)(2x - 6) - (7x + 8)((x - 5) + 9(x - 5)) =$ .

➔  $(\boxed{x+3})^2(3x+2) + 2x(\boxed{x+3})(3x+2) - 16(\boxed{x+3})(3x+2) =$ .

## II Identités remarquables

$$\blacklozenge (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$\blacklozenge (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$\blacklozenge (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

### DEMONSTRATION:

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

## III Utilisation d'identités remarquables pour la factorisation.

**Exemple 3** 1.  $(3x + 2)^2 - (x + 1)^2 = [(3x + 2) - (x + 1)] \times [(3x + 2) + (x + 1)]$   
 $= [3x + 2 - x - 1] \times [3x + 2 + x + 1] = (2x + 1)(4x + 3).$

2.  $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \times (2x) \times 1 + 1^2 = (2x + 1)^2 = (2x + 1)^2.$

3.  $16x^2 - 24x + 9 = (4x)^2 - 2 \times (4x) \times 3 + 3^2 = (4x - 3)^2 = (4x - 3)^2$

**Exercice 1** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 3 + 3(x - 3)^2 + x^2 - 9$ .

1. Développer, réduire et ordonner  $f(x)$ .

2. Factoriser  $f(x)$ .

3. Répondre aux questions suivantes en utilisant la forme la plus adaptée de  $f$  :

(a) Calculer  $f(0)$ .

(b) Calculer  $f(3)$ .

(c) Résoudre  $f(x) = 0$ .

(d) Résoudre  $f(x) = 15$ .

SOLUTION :

1.  $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$  d'après l'identité :  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .  
 $f(x) = x - 3 + 3x^2 - 18x + 27 + x^2 - 9$   
 $= 4x^2 - 17x + 15$ .

La forme réduite de  $f$  est :  $f(x) = 4x^2 - 17x + 15$

2.  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$  d'après l'identité :  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ .  
 $f(x) = (x - 3)[1 + 3(x - 3) + (x + 3)]$   
 $= (x - 3)(1 + 3x - 9 + x + 3)$   
 $= (x - 3)(4x - 5)$ .

La forme factorisée de  $f$  est  $f(x) = (x - 3)(4x - 5)$

3. (a) on utilise la forme développée la plus simple :

$$f(0) = 4 \times 0^2 - 17 \times 0 + 15 = 15 \text{ donc : } f(0) = 15$$

(b) on utilise la forme factorisée pour lequel le premier facteur s'annulera :

$$f(3) = (3 - 3)(4 \times 3 - 5) = 0 \text{ donc : } f(3) = 0$$

(c) on utilise la forme factorisée et on utilise la propriété  
un produit de facteurs est nul ssi l'un des facteurs est nul :

$$f(x) = 0 \iff (x - 3)(4x - 5) = 0 \iff x - 3 = 0 \text{ ou } 4x - 5 = 0$$
$$x = 3 \quad | \quad x = \frac{5}{4}$$

$$\text{Conclusion : } \mathcal{S} = \left\{ \frac{5}{4}; 3 \right\}$$

(d) on utilise la forme développée car on remarque la constante 15 dans les deux membres :

$$f(x) = 15 \iff 4x^2 - 17x + 15 = 15$$
$$\iff 4x^2 - 17x = 0$$
$$\iff x(4x - 17) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } 4x - 17 = 0$$
$$x = 0 \quad | \quad x = \frac{17}{4}$$

$$\text{Conclusion : } \mathcal{S} = \left\{ 0; \frac{17}{4} \right\}$$