

Combinatoire, dénombrements.

1 Cardinal d'ensembles.

1.1 Réunions disjointes d'ensembles.

Définitions 1.1 $\square$ Soit A un ensemble fini(constitué d'un nombre fini d'élément).
Le cardinal de A , noté $Card(A)$, est le nombre d'éléments de A .
 $\square$ Deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Propriété 1.1 Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n ensembles finis deux à deux disjoints, alors :

$$Card(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = Card(A_1) + Card(A_2) + \dots + Card(A_n) = \sum_{k=1}^n Card(A_k).$$

1.2 Produit cartésien d'ensembles.

Définition 1.1 $\square$ Soient A, B deux ensembles non vides. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ (se lit A croix B), constitué des couples $(x; y)$ où x est un élément de A et y un élément de B . Plus formellement on écrit :

$$A \times B = \left\{ (x; y), x \in A \quad \text{et} \quad y \in B \right\}.$$

$\square$ **Cas Général** : Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, n ensembles non vides. Le produit cartésien $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, est constitué des couples $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ où x_i est un élément de A_i pour tout $1 \leq i \leq n$. Plus formellement on écrit :

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \left\{ (x_1; x_2; \dots; x_n), \forall i \in \mathbb{N} \text{ tels que } 1 \leq i \leq n, \quad x_i \in A_i \right\}.$$

Exemple(s) 1.1

Propriété 1.2 $\square$ Soient A et B deux ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B).$$

$\square$ **Cas Général** : Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, n ensembles finis, alors :

$$\text{Card}(A \times B \times \dots \times A_n) = \text{Card}(A_1) \times \text{Card}(A_2) \times \dots \times \text{Card}(A_n) = \prod_{k=1}^n \text{Card}(A_k).$$

Exemple(s) 1.2

2 Permutation d'un ensemble fini.

2.1 Quelques exemples de permutations d'un ensemble fini.

Définition 2.1 Une permutation d'un ensemble fini E de cardinal n est une liste ordonnée des n éléments de E .

Exemple(s) 2.1

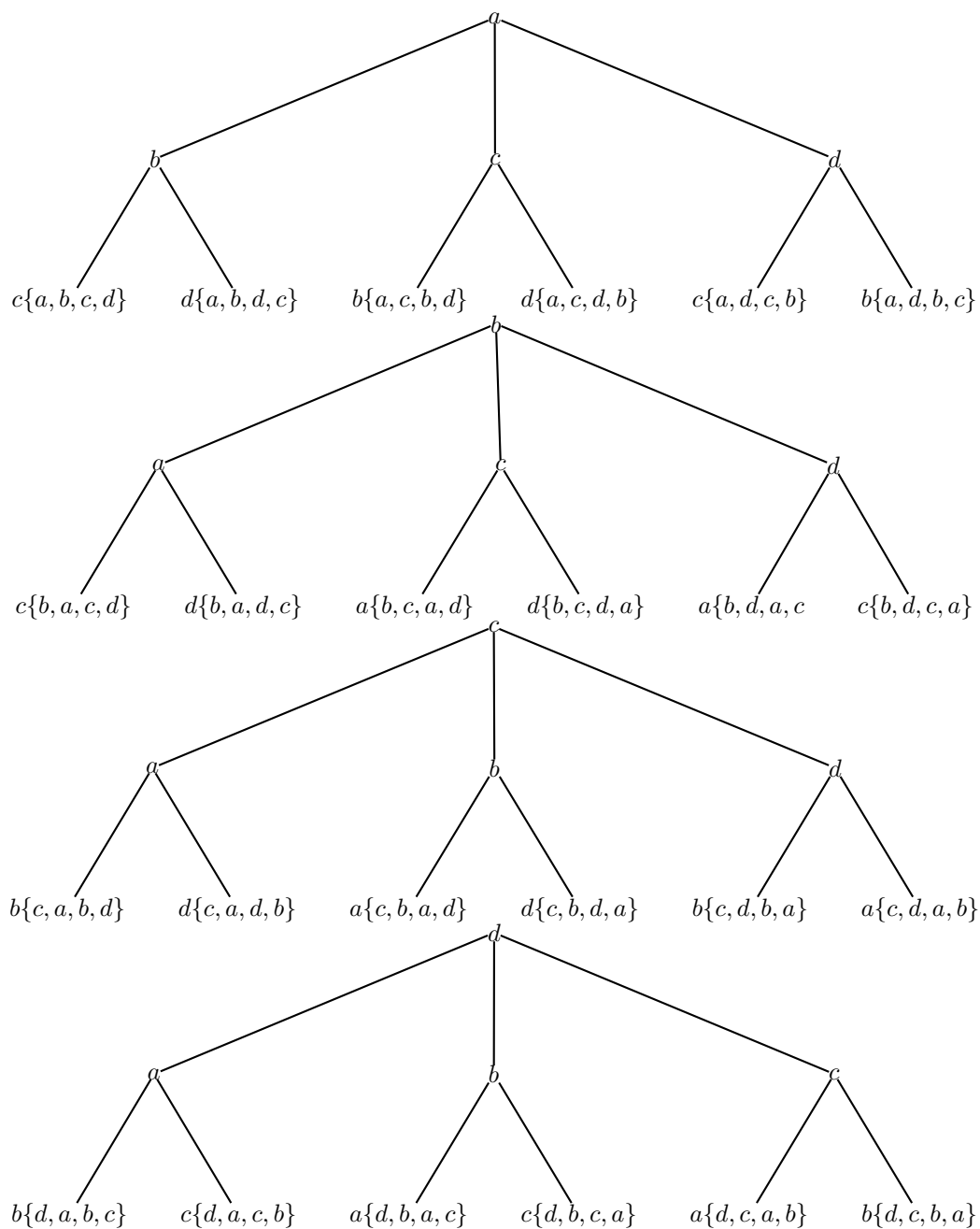
1. Si $E = \{a\}$ il existe une seule permutation de E .
2. Si $E = \{a, b\}$ il existe deux permutations de E : $\{a, b\}$, $\{b, a\}$.
3. si $E = \{a, b, c\}$, il existe 6 permutations de E : $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}$, $\{b, a, c\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{c, b, a\}$.

Remarque 2.1 Si E a pour cardinal un entier grand, il est difficile de trouver toutes les permutations de E , sans utiliser un arbre.

Combien y-a-t-il de permutations de $E = \{a, b, c, d\}$, pour répondre à cette question on peut construire un arbre (voir page 2), mais en construisant un arbre ; on fait plus que de donner le nombre de permutations, on les énumère toutes.

Pour donner une permutation de E il faut d'abord choisir la première lettre parmi les quatre données, puis il faut choisir la deuxième parmi les trois restantes, la troisième parmi les deux dernières, et la

quatrième est la dernière lettre pas encore choisie. Le nombre de possibilités pour faire une permutation de $E = \{a, b, c, d\}$ est donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.



2.2 Cas général, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n .

Propriété 2.1 Le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments ($n \geq 1$), est égal à :

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1.$$

On note ce nombre $n!$ et on lit " n factoriel", par convention on pose $0! = 1$.

Démonstration :

3 Liste sans répétitions de p éléments de E avec $\text{Card}(E) = n$ et $1 \leq p \leq n$.

Exemple(s) 3.1 Soit $E = \{a, b, c, d\}$, par exemple si $p = 2$, voici quelques exemples de listes de 2 éléments sans répétition de E :

$(a, b); (c, d); (a, c).$

Propriété 3.1 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$, le nombre de listes sans répétitions de p éléments de E , $1 \leq p \leq n$, est

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - (p - 1)).$$

4 Liste avec répétitions de p éléments de E avec $\text{Card}(E) = n$.

Exemple(s) 4.1 Soit $E = \{a, b, c, d\}$, par exemple si $p = 2$, voici quelques exemples de listes de 2 éléments avec répétitions de E :

$(a, a); (c, d); (c, c).$

Propriété 4.1 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$, le nombre de listes avec répétitions de p éléments de E , $p \geq 1$, est n^p .

5 Combinaisons.

Définition 5.1 E est un ensemble de n éléments et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$.

Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble (ou partie) de E qui contient p éléments.

Le nombre de combinaisons (ou parties) de p éléments d'un ensemble E de cardinal n est noté $\binom{n}{p}$ et se lit "p parmi n".

Exemple(s) 5.1 1. Soit $E = \{a, b, c, d\}$, prenons $p = 2$, voici quelques exemples de 2-combinaisons de E :

$$\{a, c\}; \quad \{d, a\}; \quad \{a, d\}; \quad \{b, c\}.$$

2. Il n'existe qu'une seule combinaison (partie) de n éléments d'un ensemble E de cardinal n , donc

$$\binom{n}{p} = 1, \text{ de même il existe } n \text{ parties (combinaisons) d'un seul élément d'un ensemble de}$$

$$\text{cardinal } n, \text{ donc on a } \binom{n}{1} = n.$$

Remarque 5.1 Il ne faut pas confondre une liste sans répétitions de p de E et une combinaison de p éléments de E , en effet si on prend comme le même exemple que précédemment $E = \{a, b, c, d\}$, avec $p = 2$, $\{d, a\}; \quad \{a, d\}$ sont deux listes différentes car l'ordre des lettres est différent, par contre $\{d, a\}; \quad \{a, d\}$ représente une même combinaison de deux éléments de E .

Propriété 5.1 Pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

DEMONSTRATION :

5.1 Formules reliant les nombres $\binom{n}{p}$.

Théorème 5.1 1. Pour tous entiers naturels n et p tel que $0 \leq p \leq n$, on a : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

2. Pour tous entiers naturels n et p tel que $0 \leq p \leq n-1$, on a : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$.

DEMONSTRATION :

DEMONSTRATION :

5.1.1 Triangle de Pascal.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

5.1.2 Formule du binôme de Newton.

Théorème 5.2 Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + (-1)^p \binom{n}{p}a^{n-p}b^p + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}b^n.$$

Remarque 5.2 Dans la pratique pour utiliser la formule de Newton on se servira d'un tableau de Pascal, pour calculer les coefficients $\binom{n}{p}$ des monômes $a^{n-p}b^p$.

Exemple(s) 5.2 Développons le nombre complexe $(1+i)^7$.

DEMONSTRATION DE 4.2