Dérivation et convexité.

1 Rappels : Nombre dérivé. Fonction dérivée.

Definition 1.1 *Soit f une fonction et a un point intérieur à $\mathcal{D}_f$.*
Dire que f est dérivable en a, signifie qu'il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l.$$

Ce qui revient à dire aussi :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

- *Le nombre l s'appelle le nombre dérivé de f en a, on note $l = f^{'}(a)$.*
- *Lorsque f est dérivable pour tout $x \in I$, avec $I \subset \mathcal{D}_f$ un intervalle inclu dans le domaine de f, on dit que f est dérivable sur I.*

Definition 1.2 *Si f est une fonction dérivable sur $I \subset \mathcal{D}_f$, la fonction dérivée de f sur I est la fonction notée $f^{'}$ qui à tout $x \in I$ associe le nombre réel $f^{'}(x)$.*

$$f^{'} : x \to f^{'}(x).$$

2 Dérivées des fonctions usuelles.

2.1 Opérations sur les dérivées.

Théorème 2.1 ➠ *Soient u et v deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathcal{D}_f$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Alors $u+v$, $u-v$, uv, et αu sont dérivables sur I. et on a :

- ❒ $(u+v)^{'} = u^{'} + v^{'}$ $\quad$ $(u-v)^{'} = u^{'} - v^{'}$.
- ❒ $(uv)^{'} = u^{'}v + uv^{'}$ $\quad$ $(\alpha u)^{'} = \alpha u^{'}$.

➠ *Si de plus, v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I et :*

$$\left(\frac{1}{v}\right)^{'} = -\frac{v^{'}}{v^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)^{'} = \frac{u^{'}v - uv^{'}}{v^2}.$$

2.2 Dérivées des fonctions usuelles.

Fonction f	Dérivée $f^{'}$	Domaine de dérivabilité de f
$f(x) = k$	$f^{'}(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$f^{'}(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 1$ et $\mathbb{R}^\star$ si $n \leq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f^{'}(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^\star$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f^{'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$f^{'}(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$f^{'}(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$f^{'}(x) = 1 + \tan x^2$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$f^{'}(x) = 1$ si $x > 0$ et $f^{'}(x) = -1$ si $x < 0$	$\mathbb{R}^\star$

3 Applications de la dérivation.

3.1 Sens de variation.

Théorème 3.1 *Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathcal{D}_f$.*

- ❒ *Si $f^{'} > 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où $f^{'}$ s'annule , alors f est strictement croissante sur I.*
- ❒ *Si $f^{'} < 0$ sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points où $f^{'}$ s'annule , alors f est strictement décroissante sur I.*
- ❒ *Si $f^{'} = 0$ sur I, alors f est constante sur I.*

Definition 3.1

- ❒ *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$, dire que $f(c)$ est un maximum local de f en c signifie qu'il existe un intervalle ouvert J contenant c tel que pour tout $x \in J \subset I$,*

$$f(x) \leq f(c).$$

- ❒ *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $c \in I$, dire que $f(c)$ est un minimum local de f en c signifie qu'il existe un intervalle ouvert J contenant c tel que pour tout $x \in J \subset I$,*

$$f(x) \geq f(c).$$

- ❒ *Un extremum local est soit un maximum local, soit un minimum local.*

Théorème 3.2 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I, $c \in I$.*

1. *Si $f(c)$ est un extremum local, alors $f^{'}(c) = 0$.*
2. *Si $f^{'}(c) = 0$ et si $f^{'}$ change de signe, alors $f(c)$ est un extremum local.*

4 Plan d'étude d'une fonction.

1. Détermination de l'ensemble de définition de f ($\mathcal{D}_f$).
2. Etude des limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
3. Etude du domaine de dérivation, calcul de la fonction dérivée, étude des variations de f.
4. Détermination des asymptotes verticales, horizontales, obliques. Position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport aux asymptotes.
5. Tracer la courbe représentative de f.

5 Dérivée d'une composée de fonctions.

5.1 Composition de fonctions.

INTRODUCTION :

Definition 5.1 *Soient f et g deux fonctions. la fonction qui à x fait correspondre "'quand cela est possible" le nombre réel $g[f(x)]$ se note $f \circ g$ (lire "' g rond f").*

$$f \circ g : x \mapsto g[f(x)].$$

'

Remarque(s) 5.1 *L'écriture $g \circ f(x) = g[f(x)]$ n'a de sens que si $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) \in \mathcal{D}_g$.*
Donc l'ensemble de définition de $g \circ f$ est constitué de tous les réels x tels que

- ❒ $x \in \mathcal{D}_f$
- ❒ $f(x) \in \mathcal{D}_g$.

Exemple(s) 5.1 *Soient $f : x \to 2x + 5$ et $g : x \to \sqrt{x}$, on sait que le domaine de définition def est $\mathbb{R}$, et celui de g est $\mathbb{R}^+$, on note cela $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$.*
Regardons lorsque la valeur $g \circ f(x)$ est définie, nous avons

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = \sqrt{2x + 5}.$$

Pour que $g \circ f(x)$ soit définie il faut que $2x + 5 \geq 0$, c'est à dire $x \in [-\frac{5}{2}; +\infty[$.
Donc nous avons $\mathcal{D}_{g \circ f} = [-\frac{5}{2}; +\infty[$.

Exercice(s) 5.1 *Soient f et g sont les fonctions définies par :*

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} \quad et \quad g(x) = \frac{x}{x+2}.$$

On pose $h = g \circ f$.
Trouver l'ensemble de définition de h et calculer explicitement $h(x)$.
On sait que $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{-2\}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$, pour que l'expression $g \circ f(x)$ soit définie il faut que $f(x) \neq -2$ Résolvons l'équation $f(x) \neq -2$.

$$\frac{x+3}{x+1} = -2$$

$$x + 3 = -2(x+1)$$

$$3x = -5$$

$$x = \frac{-5}{3}$$

Donc $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ et $x \neq \frac{-5}{3}$, ce qui implique que $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{\frac{-5}{3}; -1\}$. Calculons pour $x \in \mathbb{R} - \{\frac{-5}{3}; -1\}$ l'expression $g \circ f(x)$

$$g \circ f(x) = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1} + 2} = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1} + 2 \times \frac{x+1}{x+1}}$$

$$g \circ f(x) = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{3x+5}{x+1}} = \frac{x+3}{x+1} \times \frac{x+1}{3x+5} = \frac{x+1}{3x+5}.$$

6 Dérivée d'une fonction composée.

Théorème 6.1 *Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J et soit f une fonction dérivable sur I telle que pour tout $x \in I$ alors $f(x) \in J$.*
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$(g \circ f)^{'}(x) = g^{'}[f(x)] \times f^{'}(x).$$

Exemple(s) 6.1

Exemple(s) 6.2

DEMONSTRATION Montrons que pour un point quelconque $a \in I$ le rapport défini par $T(x) = \dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a}$ a pour limite en a le nombre réel $g^{'}[f(a)] \times f^{'}(a)$.

1. Prouvons d'abord ceci en supposant que pour tout x d'un voisinage de a et différent de a on ait $f(x) \neq f(a)$.
   Puisque pour x assez proche de a on a $f(x) \neq f(a)$, on peut écrire :
   $$T(x) = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
   Or f est dérivable en $a \in I$, donc $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f^{'}(a)$. Etudions la limite de $\dfrac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)}$ quand x tend vers a, on pose :
   $$h(x) = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)}.$$
   et
   $$k(X) = \frac{g(X) - g \circ f(a)}{X - f(a)}.$$
   On remarque que $h(x) = k[f(x)] = k \circ f(x)$.
   On sait que nous avons :
   — f est dérivable en $a \in I$ donc continue en a et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
   — g est dérivable en $b = f(a) \in J$ donc
   $$\lim_{X \to b} \frac{g(X) - g \circ f(a)}{X - f(a)} = g^{'}(b) = g^{'}(f(a)).$$
   D'après le théorème déjà vu sur la composition des limites, puisque $h(x) = k[f(x)] = k \circ f(x)$ nous avons :
   $$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to f(a)} k(x) = g^{'}(f(a)).$$
   Donc
   $$\lim_{x \to a} T(x) = \lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$$
   $$\lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \times \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g^{'}[f(a)] \times f^{'}(a).$$
   cqfd.
2. Donnons la preuve du théorème quand pour tout x appartenant à un voisinage de a nous avons $f(x) = f(a)$, c'est à dire f est localement constante.
   Si f est localement constante en a, alors il en est de même de $g \circ f$ en a, donc nous avons simultanément $f^{'}(a) = 0$ et $(g \circ f)^{'}(a) = 0$. Donc nous avons la relation
   $$(g \circ f)^{'}(a) = g^{'}[f(a)] \times f^{'}(a).$$
   verifiée puisque $0 = g^{'}[f(a)] \times 0$.

7 Cas particuliers de dérivées de fonctions composées.

7.1 Dérivation de $x \to \sqrt{u(x)}$.

Théorème 7.1 *Soit u une fonction dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$ telle que $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors La fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :*

$$f^{'}(x) = \frac{u^{'}(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

DEMONSTRATION :

Exemple(s) 7.1

7.2 Dérivation de $x \to u(x)^n$, avec $n \in \mathbb{Z}^\star$.

Théorème 7.2 *Soit u une fonction dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$ et soit n un entier relatif non nul.*

1. *Si $n \geq 1$, la fonction f définie sur I par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :*
$$f^{'}(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u^{'}(x).$$
2. *Si $n \leq -1$, et si de plus la fonction u ne s'annule pas sur I, la fonction f définie sur I par $f(x) = [u(x)]^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :*
$$f^{'}(x) = n[u(x)]^{n-1} \times u^{'}(x).$$

DEMONSTRATION :

Exemple(s) 7.2

8 Dérivées successives.

Definition 8.1 ❐ *Soit f une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ sa fonction dérivée $f^{'}$ se note ou parfois $f^{(1)}$, on dit auusi dérivée première.*

❐ *Si $f^{'} = f^{(1)}$ est dérivable sur I la fonction dérivée de $f^{'}$ se note $f^{''}$ ou $f^{(2)}$, on appelle $f^{''} = f^{(2)}$ dérivée seconde (ou d'ordre 2) de f.*

❐ *Par itération, si ,pour un entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur I, on note par $f^{(n+1)}$ la fonction dérivée de la fonction $f^{(n)}$. On a pour tout $n \geq 2$:*

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)^{'}.$$

En physique on note parfois pour tout $n \geq 2$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

Exemple(s) 8.1

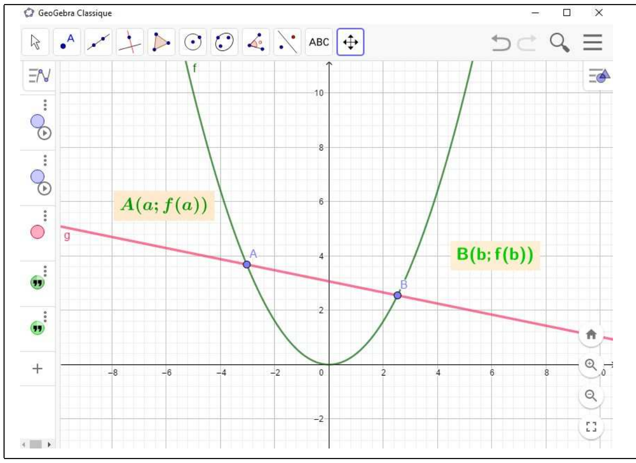
9 Convexité

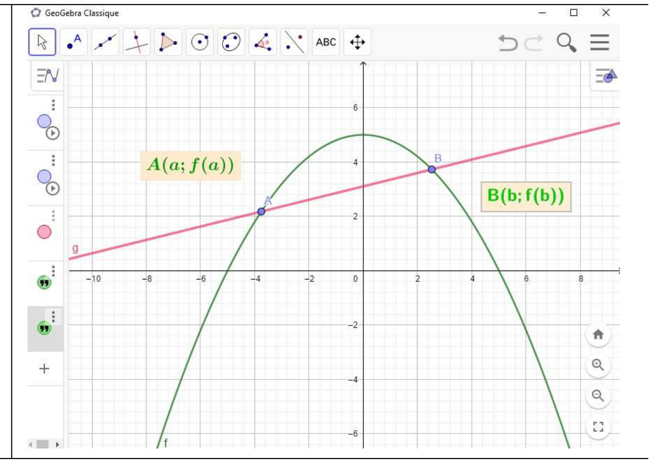
9.1 Fonctions convexes.

Definition 9.1 ❐ *Soit f une fonction définie sur un <u>intervalle</u> I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.*
On dit que f est convexe sur I, lorsque pour tous points A et B distincts de la courbe $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ entre A et B.

❐ *Soit f une fonction définie sur un <u>intervalle</u> I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.*
On dit que f est concave sur I, lorsque pour tous points A et B distincts de la courbe $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ entre A et B.

Remarque(s) 9.1 *Attention le contraire de convexe n'est pas concave, une fonction peut être ni convexe ni concave.*



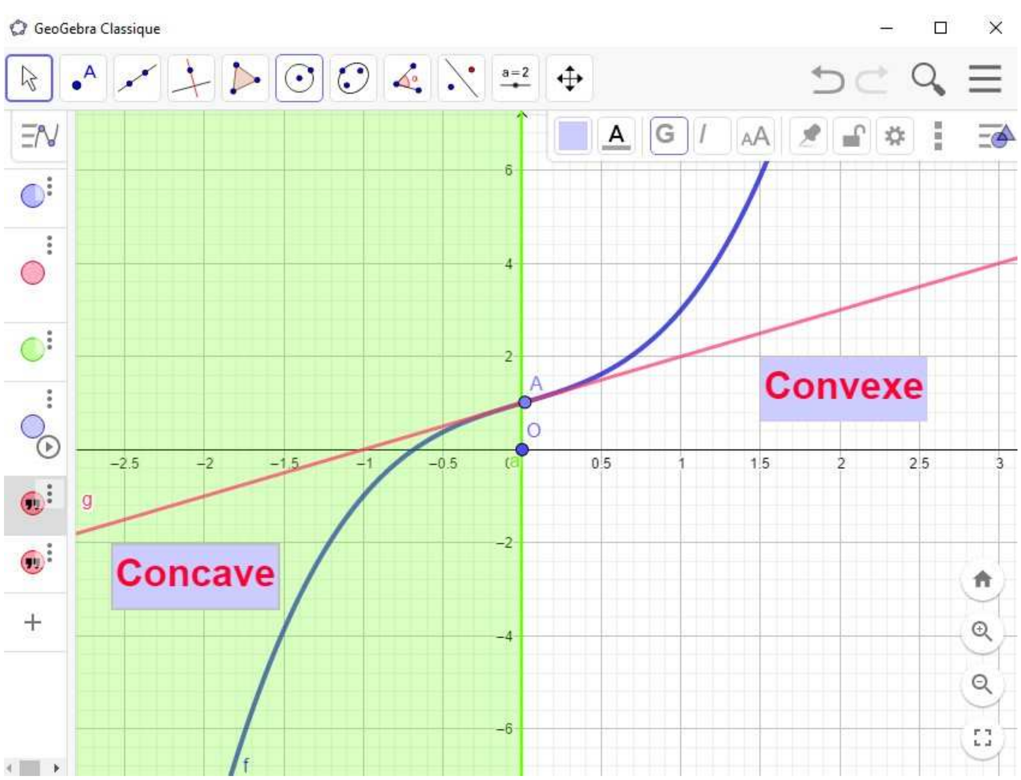


Proposition 9.1 *Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. les assertions suivantes sont équivalentes :*

- ❒ *f est convexe sur I.*
- ❒ *La courbe représentative de f est entièrement située au dessus de ses tangentes.*
- ❒ *La fonction $f^{'}$ est croissante sur l'intervalle I.*
- ❒ *$f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

9.2 Point d'inflexion d'une courbe de fonction.

Definition 9.2 *Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.*
Lorsque la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f admet un point d'inflexion, la fonction change de convexité.



Proposition 9.2 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulemnt si f'' s'annule en changeant de signe en a.*

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		a		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	

9.3 Inégalité de convexité.

Proposition 9.3

- *Si f est une fonction définie sur I convexe alors, pour tout réels a et b de I, on a :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

- *Si f est une fonction définie sur I concave alors, pour tout réels a et b de I, on a :*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exemple(s) 9.1