Produit scalaire dans le plan (révision).

1 Définition du produit scalaire.

Definition 1.1 *Soient* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs du plan, le nombre réel égal à :*

$$\frac{1}{2}\left[||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2\right]$$

est appelé ***produit scalaire*** *des vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$*, on le note* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$*.*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\frac{1}{2}\left[||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2-||\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}||^2\right].$$

1.1 Premières propriétés découlant de la définition.

Propriété 1.1

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
2. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}\geq 0$.
3. $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ *ou* $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$ *implique* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0$.

2 Différentes expressions du produit scalaire.

2.1 Expression en fonction de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

Théorème 2.1 *Si* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont deux vecteurs non nuls, alors on a :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||\times\cos(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}).$$

Corollaire 2.1

1. *Si les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires et de même sens, alors*
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||.$$
2. *Si les vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires et de sens contraire, alors*
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=-||\overrightarrow{u}||\times||\overrightarrow{v}||.$$

2.2 Produit scalaire et orthogonalité.

Definition 2.1 *Soit* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs non nuls. Dire que* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux signifie que, si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$*, alors les droites* (AB) *et* (CD) *sont perpendiculaires, ce qui équivaut à dire aussi que* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
Par convention le vecteur $\overrightarrow{0}$ *est orthogonal à tous les vecteurs du plan.*

Théorème 2.2

$\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

2.3 Expression analytique.

Plaçons-nous dans un repère du plan $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé, c'est à dire $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1$.

Théorème 2.3 *Soit* $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ *un repère orthonormé, et soit* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs de coordonnées respectives* $(x; y)$ *et* $(x'; y')$ *dans* $\mathcal{R}$*, alors on a :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'.$$

3 Projection orthogonale.

Théorème 3.1 *Soient les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *et soient les point* C' *et* D' *les projetés orthogonaux des points* A *et* B *sur la droite* (AB) *alors on a :*

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}.$$

4 Propriétés algébriques du produit scalaire.

Théorème 4.1 *Pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *et pour tous nombres réels* a *et* b*, on a :*

1. $$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}.$$
2. $$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}.$$
3. $$(a\overrightarrow{u}).(b\overrightarrow{v}) = ab(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}).$$

5 Produit scalaire, distance et orthogonalité.

5.1 Produit scalaire et distance.

Propriété 5.1

1. $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$.
2. $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.
3. $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}^2$.
4. $||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}^2$.
5. $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2$.

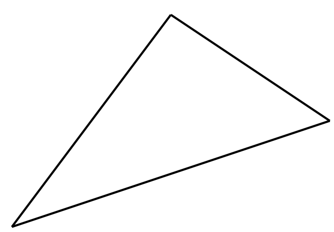
Application du Produit scalaire (révision).

6 Relations métriques dans un triangle quelconque.

Théorème 6.1

*Soit un triangle ABC **quelconque**, on désigne par :*

- *a, b, et c les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, et C,*
- *$\widehat{A}$, $\widehat{B}$, et $\widehat{C}$ les mesures des angles associés aux sommets.*



On a les relations suivantes :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$.
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$.
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.

Remarque(s) 6.1 *Si l'un des angles a pour mesure $\frac{\pi}{2}$, on retrouve la relation de Pythagore, en effet si par exemple $\boxed{\widehat{A} = \frac{\pi}{2}}$, alors le triangle ABC est rectangle en A et on a :*

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(\frac{\pi}{2}) = b^2 + c^2.$$

6.1 Théorème de la médiane.

Théorème 6.2 *Soit un triangle ABC et I le milieu de $[BC]$, alors on a :*

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}.$$

Théorème 6.3 *Etant donné un triangle ABC, l'aire S du triangle est calculée par :*

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C}).$$

On a par ailleurs :

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}.$$

6.2 Droite définie par un point et un vecteur normal.

Definition 6.1 *Un vecteur normal est un vecteur* ***non nul*** *orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.*

Propriété 6.1 *Soit A un point et un vecteur* ***non nul*** *du plan.*

1. *La droite Δ passant par A et de vecteur normal est l'ensemble des points M du plan tels que :*

$$\overrightarrow{AM}. = 0.$$

2. *Si le vecteur a pour coordonnées (a, b) dans un* ***repère orthonormé*** *$\mathcal{R} = (O; ;)$, alors on obtient une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$ de la forme :*

$$ax + by + c = 0.$$

3. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ non nuls simultanément, et $c \in \mathbb{R}$.*
Toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne d'une droite de vecteur normal $(a; b)$.

7 Droites perpendiculaires.

7.1 Droites perpendiculaires.

Théorème 7.1 *Dans un repère* ***orthonormé****, soient deux droites δ et δ' d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$, on a :*

$$\delta T \delta' \quad \Leftrightarrow \quad aa' + bb' = 0.$$

7.2 Distance d'un point à une droite.

Théorème 7.2 *Dans un repère **orthonormé**, considérons une droite δ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$, et soit le point $A(x_0;y_0)$, si on note $\mathcal{D}(\delta;A)$ la distance du point A à la droite δ, on a :*

$$\mathcal{D}(\delta;A) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

8 Equation catésienne d'un cercle.

8.1 Produit scalaire et cercle.

Théorème 8.1 *Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0}$.*

8.2 Equation d'un cercle de centre $I(x_0;y_0)$ et de rayon r.

Théorème 8.2 *Dans un repère **orthonormé**, soit un point $\boxed{I(x_0;y_0)}$ et soit un réel $\boxed{r}$ strictement positif $\underline{r>0}$.*
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tel que $IM=r$.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre I et de rayon r admet pour équation cartésienne l'équation :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2.$$

$$\mathcal{C}: x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0.$$

Théorème 8.3 *Dans un repère **orthonormé**, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(x;y)$ vérifiant une équation de la forme :*

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

est

1. *si $(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c>0$, alors $\mathcal{C}$ est <u>le cercle</u> de centre $I(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$ et de rayon $\sqrt{(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})-c}$.*
2. *Si $(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c=0$, alors $\mathcal{C}$ est <u>restreint au point</u> $I(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$.*
3. *si $(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2-c<0$, alors $\mathcal{C}$ est <u>l'ensemble vide.</u>*